



# Progetto Olimpiadi della Matematica

## Istruzioni Generali

- Per rispondere a un problema<sup>(1)</sup> occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con  $10^4$ ; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  - a) la **parte intera** di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore o uguale ad  $x$ ; si scrive  $\lfloor x \rfloor$ —ad esempio  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ,  $\lfloor 10 \rfloor = 10$ ,  $\lfloor \sqrt{17} \rfloor = 4$ ;
  - b) il **successivo** del numero intero  $n$  è il numero  $n + 1$  e i due numeri sono detti **consecutivi**;
  - c) il **fattoriale** del numero intero  $n$  è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a  $n$ ; si scrive  $n!$ —ad esempio  $1! = 1$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ ;
  - d) un **quadrato perfetto** è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  - e) una lista è **palindroma** se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio radar è palindroma; drone non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:  
 $\sqrt{2} = 1,4142$                        $\sqrt{3} = 1,7321$                        $\sqrt{5} = 2,2360$                        $\pi = 3,1415$ .

## Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata attraverso il modulo di consegna.
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani attraverso il canale previsto.
- **100 minuti dall'inizio:** termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

BUON  
DIVERTIMENTO!

<sup>(1)</sup> L'autore di un problema è indicato prima del testo.



## Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi



### 1. Colori

Andrea Macco e Giuseppe Rosolini

Tre persone, i cui cognomi sono Bianchi, Neri e Rossi, si incontrano. Solo una tra loro è matematica. Ciascuno fa un'osservazione. «Avete mai notato che i nostri cognomi corrispondono a colori e che tra noi c'è proprio una persona con i capelli bianchi, una con i capelli rossi e l'altra con i capelli neri» osserva la matematica. «È pure interessante notare – aggiunge la persona con i capelli neri – che nessuno di noi ha i capelli che si accordano con il proprio cognome». «Avete proprio ragione!» esclama Bianchi. Qual è il colore dei capelli di ciascuno dei tre? E quello dei capelli della matematica?

[Dare come risposta usando 1 per bianco, 2 per nero e 3 per rosso, ed indicando nell'ordine il colore dei capelli di Bianchi, Neri, Rossi e della matematica.]

### 2. Nel triacontagono

Sandro Campigotto

Quanti triangoli isosceli è possibile disegnare congiungendo tre vertici di un triacontagono regolare (il poligono regolare con 30 lati)?

### 3. La Morra

Leonardo Massaro

In una versione modificata di Morra Cinese, oltre che con Sasso, Carta e Forbice, si gioca con altre 111 possibili forme da fare con la mano. I giocatori scelgono sempre contemporaneamente una forma da fare; se scelgono lo stesso il gioco è un pareggio, altrimenti serve una regola per decretare quale dei due simboli vinca. Le tre regole classiche sono sempre valide: Sasso batte Forbice; Forbice batte Carta; Carta batte Sasso. Quante altre regole bisogna aggiungere come minimo?

### 4. Rapporti

Andrea Gavazzoni

Dato un triangolo equilatero  $T$ , si traccino le tre altezze di  $T$ , prolungando ciascuna altezza oltre il vertice di un segmento della stessa lunghezza del lato del triangolo. Sia  $T_1$  il triangolo determinato dai tre estremi dei prolungamenti fuori da  $T$ . Si prolunghi ciascuno dei lati di  $T$  a intersecare  $T_1$ . Qual è il rapporto tra l'area del triangolo  $T$  e la somma delle aree dei tre quadrilateri, ciascuno avente una diagonale che è il prolungamento di una delle altezze di  $T$  e due dei lati i prolungamenti dei lati di  $T$  uscenti dallo stesso suo vertice?

[Dare come risposta il rapporto moltiplicato per 1000.]

### 5. Come minimo

Carlo Càssola

Usando soltanto coppie di numeri interi  $a$  e  $b$  maggiori di 2, tali che i rapporti  $\frac{a}{a-2}$  e  $\frac{b+2025}{b+2012}$  siano uguali, qual è il valore minimo di  $a + b$  che si riesce a ottenere?

### 6. Toziente

Leonardo Massaro

La funzione  $\varphi$  di Eulero calcola, per un intero  $x$ , il numero di interi  $0 \leq y \leq x - 1$  che sono coprimi con  $x$ . Ad esempio, se  $x$  è primo, allora gli interi  $y$  coprimi con  $x$  sono tutti i numeri da 1 a  $x - 1$ : perciò  $\varphi(x) = x - 1$  se  $x$  è primo.

Il valore  $\varphi(x)$  non è semplice da calcolare per  $x$  generici, ma una sua facile proprietà è la seguente:  $\varphi(x_1 \cdot x_2) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$  per  $\text{MCD}(x_1, x_2) = 1$ , dato che in tal caso  $\text{MCD}(y, x_1 \cdot x_2) = \text{MCD}(y, x_1) \cdot \text{MCD}(y, x_2)$ . Il numero 40364503 è il prodotto di due numeri primi distinti e  $\varphi(40364503) = 40351608$ . Qual è il maggiore dei due fattori primi di 40364503?

### 7. Primi

Andrea Gavazzoni

Si considerino i numeri primi tra 100 e 1000. Quali tra questi sono tali che, in qualunque modo si permutino le cifre, si ottenga sempre un primo? [Dare come risposta la somma di tali numeri.]

### 8. Inversi

Lorenzo Mazza

Quanto vale  $x^5 + \frac{1}{x^5}$  se  $x + \frac{1}{x} = 5$ ?

### 9. Radici

Sandro Campigotto

Quali sono i numeri reali  $r$  tali che

$$r = \sqrt{2026 \sqrt[3]{2026^2 \cdot r}}?$$

[Dare come risposta la somma dei numeri trovati.]

### 10. Nel salone

Andrea Macco

Nel grande salone sono stipati furfanti, che dicono sempre il falso, e cavalieri, che dicono sempre il vero. In totale sono esattamente 10000. Uno dice: "Siamo 10000 cavalieri". Un altro dice: "Uno soltanto di noi è un cavaliere". Quanti sono i furfanti come minimo?

### 11. Coppia

Lorenzo Mazza

Quante sono le coppie  $(a, b)$  di numeri interi tali che  $b^2 - a(a+1)(a+2)(a+3) = 12$ ?

## 12. Somme di cifre

Carlo Càssola

Quanti sono i numeri interi positivi di 4 cifre, tra loro diverse, tali che una cifra sia la somma delle altre tre?

## 13. Medi

Carlo Càssola

Nel parallelogramma  $ABCD$ , siano  $M$  il punto medio di  $AB$  e  $T$  l'intersezione del segmento  $CM$  con la diagonale  $BD$ . L'area del triangolo  $BCT$  è  $500 \text{ cm}^2$ . Qual è l'area del quadrilatero  $AMTD$ ?

## 14. Alla lavagna

Carlo Càssola

Anna e Bruno si mettono alla lavagna e ciascuno inizia a scrivere una successione di interi, separati dal segno  $+$ , operando insieme passo passo. Al primo passo, Anna scrive 1; Bruno scrive 1000. Al secondo passo, Anna scrive  $1 + 2$  e calcola la somma 3; Bruno scrive  $1000 + 998$  e calcola la somma 1998. Al terzo passo, Anna aggiunge un addendo  $1 + 2 + 3$ , aumentando il precedente addendo di 1, poi calcola la somma 6; Bruno fa una cosa simile: aggiunge un addendo  $1000 + 998 + 996$ , diminuendo il precedente addendo di 2, poi calcola la somma 2994. E continuano così: al quarto passo, Anna scrive  $+ 4$ , producendo  $1 + 2 + 3 + 4$  e calcolando la somma 10; Bruno scrive  $+ 994$ , producendo  $1000 + 998 + 996 + 994$  e calcolando la somma 3988. A ogni passo, controllano se le somme che calcolano coincidono. A quale passo calcolano la stessa somma?  
[Dare come risposta il numero  $n$  che indica l'ordinale della risposta.]

## 15. In parti uguali

Carlo Càssola

La base  $AB$  del triangolo  $ABC$  è lunga 204 m, l'altezza relativa alla base  $AB$  è di 81 dm. Il triangolo è diviso in 81 parti di uguale area da segmenti orizzontali, tutti paralleli alla base  $AB$ . Qual è la massima lunghezza in dm che uno di tali segmenti può avere?

## 16. Carte e dadi

Sandro Campigotto

Fabio ha un mazzo di 40 carte: il mazzo consiste di carte di 4 segni; ciascun segno consiste di dieci carte con tutti i valori da 1 a 10. Fabio pesca una carta dal mazzo di 40 carte, poi lancia due dadi a sei facce. Qual è la probabilità che il valore della carta pescata e la somma dei numeri usciti sui dadi siano uguali?  
[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10000.]

## 17. Milleuno

Giuseppe Rosolini

Il numero 1001 ha la proprietà che il prodotto delle sue cifre è minore della loro somma, così come il numero 1002.

Qual è il minimo numero, maggiore di 1001 tale che il prodotto delle sue cifre è maggiore della loro somma?

## 18. Grigliate

Carlo Càssola

In una griglia quadrata con nove caselle su tre righe e tre colonne, ogni casella è marcata con una lettera da A a I. Si deve scrivere in ciascuna casella un numero intero in modo che ogni prodotto dei tre numeri di una riga faccia 6 così come ogni prodotto dei tre numeri di una colonna faccia 6. In quanto modi si può riempire la griglia?

## 19. Diagonalmente

Anna Ulivi

In un poligono, una **diagonale** è un segmento che congiunge due vertici non adiacenti (ad esempio, in un triangolo non ci sono diagonali; in un quadrato ci sono due diagonali). A partire da un poligono regolare con  $n$  lati, dove  $n$  è compreso tra 3 e 100, estremi inclusi, si intende disegnare una stella nel modo seguente: partendo da un vertice, si traccia, senza staccare la penna dal foglio, un percorso che passa per ciascun vertice del poligono e che termina su quello di partenza producendo una stella. Il percorso deve svilupparsi formando soltanto diagonali tutte della stessa lunghezza. Quali sono i numeri  $n$  per i quali, a partire dal poligono regolare di  $n$  lati, non è possibile disegnare neppure una stella, oppure se ne possono disegnare esattamente 3 diverse? (Due stelle sono diverse se non si possono ottenere una dall'altra mediante rotazioni e simmetrie.)  
[Dare come risposta la somma di tutti gli  $n$  trovati.]

## 20. Positiva

Carlo Càssola

Quali sono i numeri interi positivi  $n$  tali che  $n^2 + 2026$  è divisibile per  $n - 5$ ?  
[Dare come risposta la somma di tutti gli  $n$  trovati.]

## 21. Assoluta

Benedetta Demoro

Qual è il valore assoluto della somma di tutti i possibili numeri reali  $r$  tali che  $r(r + 1)(r + 2)(r + 3) = 100$ ?



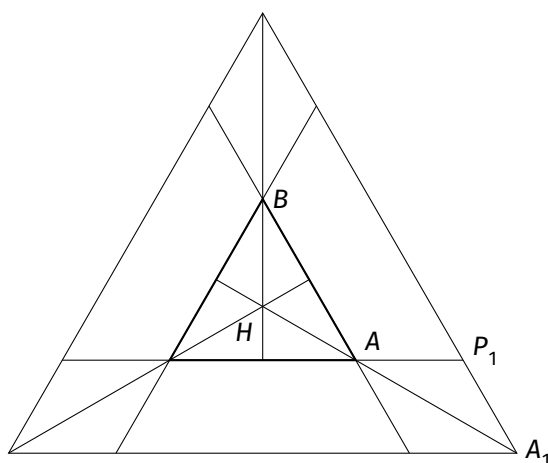
Università  
di Genova

**Soluzione del problema 1.** Bianchi ha i capelli rossi. Perciò chi ha i capelli neri è Rossi; la persona che è matematica è Neri e ha i capelli bianchi.  
La risposta è 3121.

**Soluzione del problema 2.** Ogni vertice del triacontagono è l'intersezione dei due lati uguali per 13 triangoli isosceli non equilateri e di 1 triangolo equilatero. Perciò un triangolo equilatero ricompare nell'elenco altre 2 volte. In totale i triangoli isosceli sono  $13 \cdot 30 + 1 \cdot \frac{30}{3} = 400$ .  
La risposta è 0400.

**Soluzione del problema 3.** Aggiungendo 111 forme arriviamo ad un totale di 114 possibili giocate. Osserviamo che le regole richieste devono risolvere ciascuna situazione con coppie di forme diverse, dato che per coppie di forme uguali c'è già il pareggio. Dato che ogni regola è simmetrica – cioè, ad esempio, la regola che gestisce Carta e Penna è la stessa che gestisce Penna e Carta –, quelle necessarie sono tante quante le coppie non ordinate di elementi tra 114, cioè  $\binom{114}{2} = \frac{114 \cdot 113}{2} = 6441$ . Tra queste ci sono anche le 3 regole già fissate.  
La risposta è 6438.

**Soluzione del problema 4.** I triangoli  $AHB$  e  $AP_1A_1$  sono uguali dato che hanno due angoli e il lato compreso uguali. Perciò il rapporto è  $\frac{1}{2}$ .



La risposta è 0500.

**Soluzione del problema 5.** Dato che  $a(b+2012) = (a-2)(b+2025)$ , si ha che  $a = \frac{4050+2b}{13}$ . Perciò  $a+b = \frac{4050+15b}{13}$  è una funzione crescente di  $b$  a valori razionali. Il minimo valore di  $b$  che rende  $a+b$  intero è 3.  
La risposta è 0315.

**Soluzione del problema 6.** Dato che 40364503 è prodotto di due primi  $p$  e  $q$ , e  $\text{MCD}(p, q) = 1$ , la funzione di Eulero applicata a  $n$  calcola i numeri coprimi con  $n$  e  $\varphi(n) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1) = pq - (p+q) + 1$ . Quindi  $p+q = n - \varphi(n) + 1 = 12896$ . Dunque  $p$  e  $q$  sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 12896x + 40364503.$$

Si calcola  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = 1212201 = 1101^2$  e si ricavano le due soluzioni  $6448 \pm 1101$ .  
La risposta è 7549.

**Soluzione del problema 7.** Dato che un numero primo deve terminare per 1, 3, 7, 9, si possono elencare soltanto i primi con quelle cifre tra 100 e 199, tra 300 e 399, tra 700 e 799, e tra 900 e 999. Questi sono

113	131	137	139	173	179	191	193	197	199
311	313	317	331	337	373	379	397		
719	733	739	773	797					
911	919	937	971	977	991	997			

Si trovano 113, 131 e 311; 199, 919, 991; 337, 373, 733. La risposta è 4107.

**Soluzione del problema 8.** Si osserva che  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 23$ . Poi

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1\right] = 5(23^2 - 24) = 2525$$

La risposta è 2525.

**Soluzione del problema 9.** Si ha che  $r = \sqrt[3]{2026^3 + 2026^2 \cdot r}$  se e solo se  $r^6 = 2026^5 r$ , cioè  $r = 2026$ .  
La risposta è 2026.

**Soluzione del problema 10.** Dato che le due affermazioni sono incompatibili, almeno una è falsa. Perciò la prima è falsa. Se la seconda è vera, allora i furfanti sono 9999. Se è falsa, non c'è assicurazione che ci siano altri furfanti.  
La risposta è 0002.

**Soluzione del problema 11.** Dato che  $a(a+1)(a+2)(a+3) = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a = (a^2 + 3a + 1)^2 - 1$ , la condizione si riscrive  $[b + (a^2 + 3a + 1)][b - (a^2 + 3a + 1)] = 11$ . Dato che 11 è primo, si presentano quattro casi:

$$\begin{cases} b + (a^2 + 3a + 1) = 11 \\ b - (a^2 + 3a + 1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b + (a^2 + 3a + 1) = -11 \\ b - (a^2 + 3a + 1) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} b + (a^2 + 3a + 1) = 1 \\ b - (a^2 + 3a + 1) = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} b + (a^2 + 3a + 1) = -1 \\ b - (a^2 + 3a + 1) = -11 \end{cases}$$

che si traducono nelle condizioni

$$\begin{cases} b = 6 \\ a^2 + 3a + 1 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -6 \\ a^2 + 3a + 1 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 6 \\ a^2 + 3a + 1 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -6 \\ a^2 + 3a + 1 = 5 \end{cases}$$

La condizione  $a(a+3) = 4$  è soddisfatta da  $a = 1, -4$ , mentre la condizione  $a(a+3) = -6$  non è soddisfatta da alcun numero intero.  
La risposta è 0004.

**Soluzione del problema 12.** Vista la richiesta che le cifre siano tutte diverse, per contare conviene determinare il numero  $q_{a,d}$  quadruple di cifre  $a > b > c > d$  con  $a = b + c + d$ , per induzione. Quindi contare in quanti modi possono essere organizzate le cifre.  
Nel caso in cui  $d = 0$ —e  $a = b + c$ —i numeri che si possono formare con  $a, b, c$  e  $d = 0$  sono  $3! \cdot 3 = 18$ . Nel caso in cui  $d \neq 0$ , i numeri che si possono formare sono  $4! = 24$ .

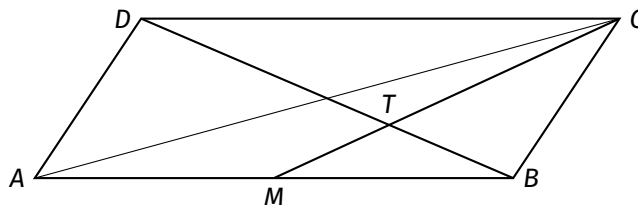
Fissata la cifra  $a$ , massima nella quadrupla, sono  $q_a^0 = \lfloor \frac{a-1}{2} \rfloor$ . In totale sono  $\sum_{a=1}^9 q_a^0 = 2 \sum_{i=1}^3 i + 4 = 16$ .

Nel secondo caso, fissata la cifra  $a$ , sono  $\sum_{\substack{d=0 \\ a-3-d \geq 2}}^1 q_{a_3}^d$ ; in totale 7. Del resto, si contano facilmente, elencando:

$$\begin{array}{llll} 6 = 3 + 2 + 1 & 7 = 4 + 2 + 1 & 8 = 4 + 3 + 1 & 8 = 5 + 2 + 1 \\ 9 = 5 + 3 + 1 & 9 = 6 + 2 + 1 & 9 = 4 + 3 + 2 & \end{array}$$

La risposta è 0456.

### Soluzione del problema 13.



Il punto  $T$  è il baricentro del triangolo  $ABC$ . Perciò  $CT = 2MT$  e  $\text{area}(BCT) = 2 \text{ area}(MBT)$ . Del resto anche  $\text{area}(ADB) = 2 \text{ area}(MCB)$ . Dato che  $\text{area}(MCB) = \text{area}(BCT) + \text{area}(MBT)$ , si ha che  $\text{area}(AMTD) = 2 \text{ area}(BCT) + \text{area}(MBT)$ .

La risposta è 1250.

**Soluzione del problema 14.** Chiaramente il passo  $n$ -esimo sarà superiore a 500 dato che, al 500-esimo passo, le somme sono una il doppio dell'altra:  $\sum_{i=1}^{500} i = \binom{501}{2}$  e  $\sum_{j=1}^{500} 2j = 2 \sum_{i=1}^{500} i$ .

Perciò la richiesta di confrontare i numeri  $\sum_{i=1}^n i$  e  $2 \sum_{j=501-n}^{500} j$  che dipendono da  $n$ , equivale alla richiesta che

$$\sum_{i=1}^{500} i + 500(n - 500) + \sum_{i=1}^{n-500} i = 2 \sum_{j=1}^{500} -2 \sum_{j=0}^{n-501} j$$

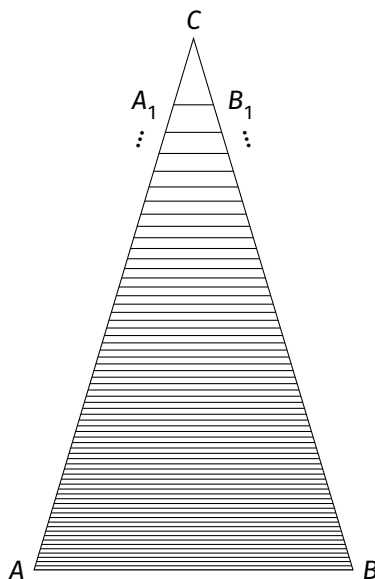
cioè, posto  $m = n - 500$ ,

$$\binom{501}{2} = 501m + 3 \binom{m}{2}$$

da cui si ottiene  $m = 167$ .

La risposta è 0667.

**Soluzione del problema 15.** Sia  $a$  l'area di  $ABC$  e si considerino i segmenti  $A_i B_i$ ,  $i = 1, \dots, 80$  che dividono il triangolo  $ABC$  in parti di uguale area.



I triangoli  $ABC$  e  $A_0B_0C_0$  sono simili. Perciò il rapporto tra le aree dei triangoli  $A_0B_0C_0$  e  $ABC$ , che è  $\frac{80}{81}$ , è il quadrato del rapporto tra le basi corrispondenti. Così  $A_0B_0 = \frac{4\sqrt{5}}{9}AB = \frac{4\sqrt{5}}{9}2040 \text{ dm}$ . La lunghezza dell'altezza è irrilevante. La risposta è 2027.

**Soluzione del problema 16.** I valori della somma dei dadi che possono essere ottenuti con le carte sono solo 2, ..., 10. La probabilità di ottenere uno di questi numeri come somma è  $\frac{33}{36} = \frac{11}{12}$ . Detto  $V$  il valore della carta estratta e  $S$  il valore della somma dei dadi si ha

$$\mathbb{P}(S = V) = \sum_{j=2}^{10} \mathbb{P}(S = j, V = j) = \frac{1}{10} \sum_{j=2}^{10} \mathbb{P}(S = j) = \frac{1}{10} \frac{11}{12}.$$

La risposta è 0916.

**Soluzione del problema 17.** Tutte le cifre devono essere diverse da 0. Se le prime tre sono tutte 1 e  $p$  è il prodotto delle cifre, la somma  $s$  è  $p + 3$ . La risposta è 1125.

**Soluzione del problema 18.** I prodotti di tre interi positivi che risultano 6 richiedono un fattore 6 e due fattori 1, oppure un fattore 2, un fattore 3 e un fattore 1.

Si nota che, se nella griglia compaiono due 6, allora ne deve comparire anche un terzo. Questi devono essere su righe e colonne distinte: ci sono 6 modi in cui inserirli. Tutti gli altri numeri sono 1.

Se nella griglia compare un singolo 6, le due coppie di fattori 2 e 3 devono comparire in righe e colonne diverse da quelle dove compare il 6. Inoltre le due posizioni del 2 determinano univocamente le due posizioni del 3. Tutti gli altri numeri sono 1. Il 6 può essere inserito in una delle nove caselle; a quel punto i due 2 hanno due possibili inserimenti: ci sono 18 modi in cui inserirli.

Se nella griglia non compare un 6, ci sono tre coppie di fattori 2 e 3. Fissate le colonne dove posizionare il 2 e il 3 che devono comparire nella prima riga in 6 modi possibili, restano due posizioni nell'altra colonna dove posizionare il terzo 2: i modi per riempire la griglia sono 12.

In totale, la griglia può essere riempita in 36 modi con fattori positivi. Si ottengono griglie diverse sostituendo quattro di questi con i loro opposti (in 9 modi), oppure sei di questi con i loro opposti a patto che i tre numeri positivi rimasti siano uno per riga e per colonna (in 6 modi).

La risposta è 0576.

**Soluzione del problema 19.** Per produrre un percorso come richiesto, prima di tutto due vertici consecutivi sul percorso devono avere  $k - 1$  vertici tra di loro con  $k > 1$ , nel senso che se un vertice è in posizione 0 quello consecutivo è in posizione  $k$ , o  $-k \equiv n - k \pmod{n}$ . Inoltre, per completare il percorso come richiesto dal vertice da cui si è iniziato, è necessario che  $k$  sia relativamente primo con  $n$ . Infine, un tale  $k$  determina una stella uguale a quella determinata da  $n - k$ , suo complemento a  $n$ .

Si cercano i numeri interi  $n > 2$  tali che la collezione dei numeri tra 0 e  $n - 1$  che sono relativamente primi con  $n$  sono 2, cioè 1 e  $n - 1$ , oppure 8 = 2(1 + 3), cioè tre numeri relativamente primi con  $n$  e inferiori di  $\frac{n}{2}$  oltre a 1, insieme con i loro complementi a  $n$ .

I primi sono 3, 4 e 6; i secondi sono 15, 16, 20, 24 e 30.

La risposta è 0118.

**Soluzione del problema 20.** Sia  $n^2 + 2026 = k(n - 5)$  per un opportuno  $k$  intero. Dato che  $n^2 = (n - 5)^2 + 10(n - 5) + 25$ , la condizione è equivalente alla richiesta che  $(n - 5) | 2051 = 7 \times 293$ , cioè  $n - 5 = -1, 1, 7, 293, 2051$  e  $n = 4, 6, 12, 298, 2056$ .

La risposta è 2376.

**Soluzione del problema 21.** Si tratta di sommare le soluzioni reali distinte dell'equazione di quarto grado. Ponendo  $x = r - \frac{3}{2}$ , la condizione diventa  $x^4 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1591}{16} = 0$ . Dato che l'equazione  $y^2 - \frac{5}{2}y - \frac{1591}{16} = 0$  ha

soluzioni  $y = \frac{5}{4} \pm \sqrt{101}$ , le soluzioni  $x$  reali sono  $\pm \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ . Perciò i numeri reali  $r$  sono  $-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt{101}}$ .

La risposta è 0003.